

**«Система работы МО учителей математики лицея №176 по развитию продуктивного мышления и исследовательских компетенций учащихся»**

**Тропина Н.В., к.п.н.,  
доцент кафедры алгебры и  
математического анализа НГПУ**

Дадим определения основным понятиям.

**Продуктивное мышление** характеризуется *высокой новизной* своего продукта, *своеобразием процесса* его получения и *существенным влиянием* на умственное развитие. Продуктивное мышление учащихся обеспечивает самостоятельное решение новых для них проблем, глубокое усвоение знаний, быстрый темп овладения ими, широту их переноса в относительно новые условия. Главным признаком продуктивных умственных актов является возможность получения новых знаний в самом процессе, т. е. спонтанно, а не путем заимствования извне.

Под **учебной исследовательской деятельностью** учащегося понимается процесс решения им исследовательской задачи с заранее неизвестным (ученику) результатом, имеющий своей целью построение субъективно нового знания и (главное!) развитие разных сторон личности учащегося.

**Исследовательская компетенция** в преломлении ее содержания для учащихся школ включает в себя другие компетенции. Перечислим основные из них:

- 1) Осознание сути поставленной задачи (самостоятельная формулировка проблемы)
- 2) Выдвижение гипотезы и плана исследования (плана решения задачи)
- 3) Проработка научной и научно-популярной литературы
- 4) Внесение **самостоятельного вклада** в исследование
- 5) Работа с разнообразными источниками информации: отбор, переработка, систематизация, обобщение.
- 6) Навыки научной дискуссии.
- 7) Создание печатного текста работы по проведенному исследованию
- 8) Изложение краткой сути работы в устном выступлении
- 9) Создание итоговой презентации

Согласно модели лицейского математического образования, разработанной МО учителей математики лицея, значительное внимание уделяется формированию исследовательских компетенций учащихся в процессе их обучения математике.

Говоря об исследовательской деятельности школьников, мы подразумеваем, как правило, работу над конкретной темой, предложенной ученику учителем или научным консультантом. Однако, это – лишь верхняя часть «айсберга».

Структура организации исследовательской деятельности учащихся в лицее 176 представлена на схеме.

Схема «Организация исследовательской деятельности учащихся лицея №176»



Рассмотрим подробнее разные формы организации учебной исследовательской деятельности учащихся.

1. Исследовательские вопросы и задания на уроках.
2. Домашние задания исследовательского характера.
3. Проведение нетрадиционных уроков, предполагающих выполнение учениками учебного исследования.
4. Исследовательские задачи на спецкурсах по выбору.
5. Школьное научное общество.
6. Участие в олимпиадах, конкурсах, предметных неделях и т.п.
7. Индивидуальная или групповая учебно-исследовательская деятельность.

Охарактеризуем каждый из уровней, называя приемы и методы организации ученических исследований, приводя примеры.

## Исследовательские вопросы и задачи на уроках (домашние задания)

При обучении математике в школе, да и в вузе, как правило, последовательность изложения материала идет от теории к практике, а решение задач строится «делай по образцу».

Когда же ученый строит новую теорию, большую роль играет умение выбирать значимые факты и перспективные направления (Пуанкаре считал, что эти умения основаны на эстетическом чувстве).

Когда ученику дают теорию в готовом виде, то эти умения не развиваются. Обучая от «теории», мы воспитываем пользователя науки, который будет уметь применять лишь известные методы в известных ситуациях. Если ученик не освоил ни одной темы «от задач», нельзя сказать, что он понимает, как устроена математика.

Конечно, обучение от задач более индивидуально. На уроках можно ввести лишь некоторые его элементы (приемы).

**Прием первый.** *Открытая постановка задач.* Заменяем формулировку вопроса «Доказать...», «Решить...» на более открытую «Доказать или опровергнуть утверждение...» или «Верно ли утверждение...? Если верно, доказать, если нет – привести пример».

Пример 1. Функции  $f$  и  $g$  возрастают на промежутке  $X$ . Верно ли, что функции

1)  $f + g$ ,  $f^2$ ,  $f \cdot g$  возрастают на промежутке  $X$ ;

2)  $-f$ ,  $\frac{1}{f}$  убывают на промежутке  $X$ ?

**Прием второй.** Разбить задачу на подзадачи и подвести тем самым учеников к основному результату.

Пример 2. Подзадача А. Пусть  $x^2 + 5x + 4 = 17$ . Вычислить

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

Задача Б. Решить уравнение  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 360$ .

**Прием третий.** Предоставить ученику право самому выбирать данные.

Пример 3. Найти площадь кольца, сделав только одно измерение. (Или выразить площадь арбелоса через наименьшее число данных)

**Прием четвертый.** Обобщение или конкретизация (частный случай).

Пример 4. Найти сумму  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ .

**Прием четвертый.** Вместо указания «Построить конструкцию» задать вопрос «Можно ли построить конструкцию, удовлетворяющую данным требованиям?»

Пример 5. У шахматной доски отпилили две противоположные угловые клетки a1 и h8. Можно оставшуюся часть доски покрыть без пустот доминошками?

(У Арнольда формулируется категорично требуется покрыть! Развитие критичности мышления, так как задача имеет отрицательный ответ: нельзя)

**Прием пятый.** Обратные задачи: расставить скобки так, чтобы равенство стало верным; по корням составить уравнение; по области определения (или множеству значений) построить функцию; назвать число с данным количеством делителей; написать функцию по ее графику и т.п.

Пример 6. Сколько корней может иметь уравнение вида

$$\left| |x| + a \right| = b ?$$

Написать уравнение такого вида, которое имеет ровно одно решение; ровно три решения; ровно семь решений; не имеет ни одного решения.

**Прием шестой.** Замечаем закономерности и высказываем гипотезу.

Пример 7. Найти сумму 1)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ ;

2)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$ . (Подсказка сумма имеет вид  $a + \frac{b + cn}{2^n}$ ).

**Прием седьмой.** Найти ошибки (в утверждении; в доказательстве).

**Прием восьмой.** Найти *все возможные* пути решения задачи. В настоящее время задача С4 ЕГЭ как раз нацелена на проверку способностей учащихся увидеть два разных хода решения задачи.

### **Исследовательские задачи на спецкурсах по выбору**

В зависимости от тематики спецкурса исследовательские задачи могут быть узкопредметными, межпредметными, надпредметными (носить характер проекта).

Приведем примеры.

Спецкурс «Исследовательские задачи по математике». 7 «Б» класс, математический профиль. Учитель Н.В. Тропина, (к.п.н., доцент каф. Алгебры и математического анализа НГПУ). Тема «Графики линейных неравенств и их систем. Задачи линейного программирования». На изучение темы отводится 4 часа.

Первые два урока посвящены повторению темы «Линейная функция» и «Системы линейных уравнений». Отрабатываются навыки построения прямых, решения систем линейных уравнений, формируются навыки графического решения неравенств и их систем, уточняются такие теоретико-множественные понятия, как множество, пересечение множеств, объединение множеств, подмножество.

На протяжении третьего урока учащиеся выполняют исследовательское задание по группам. Каждой группе из 3-4 человек выдается задача по теме «Простейшие задачи линейного программирования». *Целью* является решение данной задачи и ее защита либо перед классом (для тех, кто решил задачу первыми), либо перед учителем.

Приведем пример такой *задачи*. «Подруга посоветовала Даше перейти на рациональное питание, состоящее из двух продуктов  $P$  и  $Q$ . Суточное питание этими продуктами должно содержать не более 14 единиц жира (чтобы похудеть!), но не менее 300 калорий. На упаковке продукта  $P$  написано, что в одном килограмме этого продукта содержится 15 единиц жира и 150 калорий, а на упаковке с продуктом  $Q$  - 4 единицы жира и 200 калорий соответственно. При этом цена 1 килограмма продукта  $P$  равна 15 руб., а 1 кг продукта  $Q$  - 25 руб.

Так как Даша была стеснена в средствах, то ее интересовал вопрос: в какой пропорции нужно брать эти продукты для того, чтобы выдержать условия диеты и истратить как можно меньше денег? Составьте план питания Даши».

### Групповые исследовательские проекты

Групповые исследовательские проекты могут носить как чисто математический характер, так и межпредметный, даже, например, профориетационно-мотивирующий.

Перед уроком по теме «Комплексные числа, действия с ними» учитель Будникова Л.Н. поставила перед группой учащихся 11 класса задачу провести опрос студентов НГТУ, задав им вопросы «Знают ли они комплексные числа?» «Понадобилось ли им знание комплексных чисел и для чего?». Результаты опроса были школьниками проанализированы и результаты анализа доведены до сведения одноклассников на уроке. Ответы студентов показали, что знание комплексных чисел кому-то понадобилось только для того, чтобы сдать экзамен по высшей математике, но некоторым студентам они оказались необходимы для написания курсового и (или) дипломного проектов.

Проект может быть как краткосрочным: рассчитанным на один-два урока, так и долгосрочным, рассчитанным на специальную подготовку. Время долгосрочного проекта может варьироваться от недели до полугода. Это зависит от поставленной задачи и возраста учащихся.

Приведем пример занятия-проекта по теме «Шифрование и дешифрование». Урок проводился в 8 «Б» классе, во время спецкурса «Исследовательские задачи по математике» (учитель Н.В. Тропина). На предыдущем, подготовительном уроке по теме были приведены примеры разных видов шифров и ключей к ним. На втором уроке учащиеся были разбиты на группы по 4 человека. Им была предложена зашифрованная записка и ключ к дешифровке. Необходимо было за урок расшифровать записку.

Задание (первый вариант) имело вид.

«Перед вами зашифрованный русский текст:

1 2+3 4+2+5+6 7+5+7 8+3+9+5+10+11 4+5+12+5+13+14. 10+3+15+3+8+11  
1 4+2+5+16 8+3+9+3+2+17+3 17 18+7+19+8+19 8+3+9+14 3+3. 7+10+19  
8+3+9+5+3+10 4+5+12+5+13+17 18+7+19+8+3+3, 10+19+10 8+3+9+17+10

20+19+6+11+9+3    4+5+12+5+13.    4+5    7+5+21+12+14+16    8+3+9+3+2+2+14+16  
4+5+12+5+13+14    2+5+13+17+18+6+1+16+10+18+1    19+13+7+17.

Каждой букве соответствует одно число, причем разным буквам соответствуют разные числа (е и ё считаются одной буквой). Зашифрованные буквы в пределах одного слова соединяются плюсами; знаки препинания сохранены. Расшифруйте этот текст».

### **Индивидуальная исследовательская деятельность школьника под руководством научного руководителя и (или) учителя**

Хочется отметить, что исследовательские вопросы, задания и задачи на уроках математики и во время факультативных занятий или занятий спецкурсов призваны сыграть мотивирующую функцию, выявить из учеников тех, кто действительно желает заниматься самостоятельным исследованием.

Исследовательская деятельность школьников – это «творческий процесс совместной деятельности двух (или более) субъектов по поиску решения некоторой проблемы, в ходе которого происходит трансляция между ними культурных ценностей, результатом которой является формирование мировоззрения» [

Очевидно, что эти новые закономерности могут оказаться действительно новыми для науки XXI века, а могут быть новыми только для самого исследователя. При этом важно, чтобы известное заранее решение проблемы не снижало исследовательский задор наставника. Ибо неподдельный интерес к проблеме исследования у самого педагога – основа успеха исследовательской деятельности учащихся.

Очевидно, что при организации исследовательской работы учащихся необходимо учитывать ее основные принципы. Таковыми являются, например: принцип *естественности* (т.е. проблема не должна быть надуманной, интерес к ней должен быть настоящим и обоснованным); принцип *осознанности* (ребенок понимает поставленные цели и задачи, а также примерный ход исследования проблемы); принцип *самостоятельности* или *самодетальности* (наличие собственного вклада ученика в исследование, личное его «переживание» и «прочтение» данной проблемы и ее исследования); принцип *наглядности* (осознание проблемы и ее решения не только по книгам, но и через собственный жизненный опыт).

### **Виды исследовательских работ школьников**

Выделим четыре основных вида творческих работ учащихся по математике.

**Информационно-реферативные** — исследовательские работы, написанные на основе нескольких литературных источников с целью наиболее полного освещения

какой-либо математической проблемы, метода или идеи. К работам этого вида можно отнести, например, работы по историческим вопросам математики: истории возникновения рациональных и десятичных дробей, истории развития тригонометрических понятий, применению математики в искусстве (архитектуре), истории становления дифференциального и интегрального исчисления. В работах такого типа можно рассмотреть основной вклад в математику конкретного ученого (Евклида, Диофанта, Л. Эйлера, Н.Г. Лобачевского, других) или целой математической школы. Как показали наши исследования, школьники имеют слабые представления об истории возникновения и значении терминов, обозначающих некоторые математические понятия; не всегда представляют когда, как и в какой стране возникли те или иные математические идеи и результаты, кто является их автором. Исключением, пожалуй, является теорема Пифагора. Эти пробелы необходимо восполнять, в том числе, с помощью написания исследовательских работ по истории математики и последующего выступления перед одноклассниками.

*Экспериментально-практические* работы описывают научный эксперимент или результаты практической работы. К деятельности такого типа можно отнести, например, работу по составлению плана местности, окружающей школу, дом или план микрорайона с заданным масштабом (5-6-ые классы); измерение площадей многоугольников с помощью разбиения их на треугольники или четырехугольники известных видов (5-7-ые классы); измерение площадей поверхностей или объемов неправильных многогранников (10-11-ые классы).

*Поисково-реферативные* работы подразумевают тщательное изучение основных положений какой-либо математической теории (метода, раздела, идеи) на основе нескольких научно-популярных и научных источников и последующее выполнение некоторой самостоятельной математической деятельности (доказывается следствие теоремы; строится пример, иллюстрирующий теорему; приводится обоснование метода доказательства; доказывается обобщение теоремы; строится контрпример, показывающий важность того или иного условия теоремы и т.п.). После изучения теоремы о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника возникает естественный вопрос о возможности обобщения этого результата на невыпуклые многоугольники. Можно предложить девятиклассникам исследовать этот вопрос. После знакомства с признаками подобия треугольников можно задать учащимся вопрос о существовании специальных признаков подобия четырехугольников (многоугольников). Идеальной будет такая организация работы учащихся по теме «Подобие треугольников», в процессе которой они самостоятельно подойдут к этому вопросу.

Теме «Доказательство неравенств» в обязательном школьном курсе уделяется очень мало времени. Вместе с тем, существует множество различных методов доказательства, правда не универсального характера, но пригодных для некоторого класса неравенств. Изучение одного или нескольких таких методов доказательства, их последующее применение к доказательству или получению новых неравенств может стать целью поисково-реферативной работы.

Учащимся старших классов (10–11-х) можно давать работы по таким разделам математики, как дифференциальные уравнения и их применения в естествознании; теория вероятностей; исследование операций; теория графов; топология и другие. Понятно, что доказать сложные теоремы из данных разделов школьникам не под силу, но ознакомиться с основными понятиями раздела, установить связи между ними, решить на основе этого некоторые задачи или привести интересные примеры (контрпримеры) под силу порой и девятиклассникам.

**Проблемно-исследовательские** работы содержат действительно новую, ранее не рассматриваемую проблему, либо новый математический объект, предлагают свой авторский способ доказательства известного или нового результата.

Все виды работ ориентированы на постановку проблемы, собственно изучение материала и выводы.

Заметим, что работы реферативного и практического характера более приемлемы для учащихся 5–7-х классов, реферативного и поисково-реферативного для учеников 7–11-х классов. Проблемно-исследовательские работы под силу хорошо подготовленным 10–11-классникам. Хотя могут быть исключения: все зависит от индивидуальных интересов и математической подготовки школьников.

### Этапы исследовательской работы

Выполнение любой исследовательской работы (независимо от ее вида) подразумевает реализацию следующих *этапов*, присущих любому научному исследованию.

1. Ознакомление с тематикой работ, предлагаемой руководителем, и выбор темы в соответствии со своим интересом. Возможна и самостоятельная формулировка темы исследования учащимся.
2. Обсуждение выбранной темы с научным руководителем, согласование списка литературы, необходимой для изучения темы; формулировка цели и задач работы.
3. Изучение и обработка литературных источников.
4. Выполнение исследовательской части работы на основе изученного теоретического материала.



5. Тщательный отбор материала, необходимого для изложения темы исследования; оформление работы в печатном виде.

6. Подготовка небольшого сообщения (10 – 15 минут) по итогам выполненной работы для выступления на школьной научно-практической конференции.

Остановимся подробнее на специфике реализации некоторых из выделенных этапов.

Для успешной реализации первых двух этапов каждому руководителю, методическому объединению учителей математики школы (района) полезно иметь примерный перечень тем исследовательских работ школьников с указанием списка рекомендуемой литературы и классов, в которых эти темы могут быть предложены. Данный перечень должен дополняться, обсуждаться на семинарах учителей математики.

Перейдем к рассмотрению 3-го этапа исследовательской работы – *изучению и обработке литературных источников*. В случае информационно-реферативной работы этот этап является основным содержанием работы, в трех остальных случаях его результаты выступают в качестве литературного обзора по теме и содержат необходимые математические сведения, которые используются автором в дальнейшем исследовании. Надо заметить, что написать хорошую информационно-реферативную работу отнюдь не просто.

Для успешной реализации 3 этапа необходимо обладать следующими навыками работы с научной и научно-популярной литературой:

- \* выбирать в тексте самое значимое для раскрытия изучаемой темы;
- \* перечитывать наиболее важный текст с целью понять его содержание;
- \* восстанавливать пропущенные детали, обращая в случае необходимости к учебникам, энциклопедиям, справочникам, цитируемой в тексте литературе;
- \* делать полные и точные выписки из прочитанного для грамотного оформления ссылок;
- \* сопоставлять изложения одного и того же материала в различных источниках, выделять общее и отличительное;

В силу специфики исследовательских работ по математике, отмеченной выше, всегда проблематичным является вопрос об исследовательской, самостоятельной составляющей работы, представленной на школьную конференцию (4 этап). Чтобы внести некоторую определенность в этот вопрос, введем понятие индивидуального вклада учащегося в работу.

Под *индивидуальным вкладом учащегося в математическое исследование* будем понимать следующие виды интеллектуальной деятельности и их результаты:

- 1) изучение литературы по теме исследования;

- 2) восстановление элементов доказательства математических утверждений, получение следствий из теорем;
- 3) попытки обобщения известных результатов;
- 4) изучение новых методов решения уравнений (неравенств) определенного типа, доказательств тождеств, неравенств;
- 5) проведение компьютерного эксперимента, результаты которого позволили бы сформулировать гипотезу исследования;
- 6) составление программы, обеспечивающей компьютерную поддержку результатов исследования (приближенное решение уравнений с заданной точностью, построение графиков функций, уравнений, неравенств, решение функциональных уравнений);
- 7) практические и графические работы (изготовление моделей геометрических тел, диаграмм, схем планов, карт и т.п.);
- 8) применение математических результатов к решению естественнонаучных задач.

Ниже приведены некоторые темы работ, представленных учащимися лицея на городской научно-практической конференции:

- «Количество разбиений прямоугольников на домино».
- «Геометрия и некоторые задачи генетики».
- «Конечные паркеты».
- «О представлении натуральных чисел в виде суммы квадратов».
- «Задачи о выпуклых фигурах»
- «О суммировании некоторых числовых последовательностей».
- «Сложность алгоритмов».
- «Арифметики фигур».
- Признаки подобия четырехугольников».
- «О числе четырехугольников с целыми сторонами и периметром  $n$ ».
- «Задача о выявлении фальшивой монеты»
- «Построение треугольника по одноименным элементам».
- «Сортировка железнодорожных составов и числа Фибоначчи».

#### **Темы других авторов (по материалам газеты «Математика»)**

##### **А. Ястребов, г. Ярославль.**

1. «Обобщение игры в 15» (Проблема: Справедливо ли утверждение теоремы, доказанной для квадрата  $4 \times 4$ , для квадратов других размеров? Игра в восемь. Игра в 24. И т.д.)

2. «Треугольник, вписанный в треугольник». Пусть в треугольнике ABC точки на сторонах делят их в одном отношении. Какую часть площадь полученного треугольника составляет от площади треугольника ABC. (8 класс)

3. Найти множество точек, равноудаленных от двух геометрических фигур, если каждая из этих фигур выбрана из списка: точка, прямая. Луч. Окружность.

#### **О.Прокопьева, г. Ангарск.**

1. «Магический квадрат» (задача олимпиады 5 класса)

2. «Разные доказательства теоремы Пифагора»

3. «Замечательные свойства замечательных кривых» (Конические сечения)

#### **А. Сгибнев, Москва**

1. Когда квадрат  $2^n \times 2^n$  без угловой клетки можно разрезать на полоски  $1 \times 3$ ? (6 класс)

2. Дано натуральное число  $n$ . Сколько существует пар натуральных чисел  $a$  и  $b$ , для которых  $n$  является а) средним арифметическим; б) средним геометрическим; в) средним гармоническим; г) средним квадратичным?

3. Построение многоугольника по точкам, делящим стороны в известном отношении. (9 класс).

#### **Список рекомендуемой литературы**

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 10-11 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
2. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия для 8-9 классов: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
3. Арнольд В.И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. – М.: МЦНМО, 2004.
4. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. – М.: Физматгиз, 1961.
5. Куррант Р., Роббинс Г. Что такое математика? - М.: МЦНМО, 2004.
6. Пойа Д. Как решить задачу? Пособие для учителей.. – М.: Учпедгиз, 1959.
7. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Учпедгиз, 1976.
8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Учпедгиз, 1957.
9. Мадера А.Г., Мадера Г.А. Математические софизмы. Правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям. – М.: Просвещение, 2003.
10. Маковецкий В.П. Смотри в корень. Сборник любопытных задач и вопросов.. – М.: Наука, 1976.

11.Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – Ч.1. – М.: Наука, 1991.  
Журналы «Квант», «Математика в школе», газета «Математика»,  
«Математическое просвещение», «Математическое образование».